第 9 講　位置ベクトル

PART1　位置ベクトル

1　3点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，辺 BC を 2：3 に内分する点を D，辺 BC を 1：2 に外分する点を E，△ABC の重心を G，△AED の重心を G′ とする。

次の問いに答えよ。

(1)　点 G，点 G′ の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{GG'}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ であることを証明せよ。

Point Pickup

2点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を

$m:n$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は　$\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

$m:n$ に外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は　$\vec{q}=\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}=\dfrac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n}$

3点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ を頂点とする △ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

第 9 講　PART1　確認問題

1　3 点 A$(\vec{a})$, B$(\vec{b})$, C$(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D，辺 AB を 3 : 1 に外分する点を E，△ABC の重心を G，△CDE の重心を G′ とする。また，点 D，E，G，G′ の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{g}$，$\vec{g'}$ とする。次の問いに答えよ。選択肢は最も適切なものを選べ。

(1)　$\vec{g}$，$\vec{g'}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\vec{g}=$ ［ア］　　$\vec{g'}=$ ［イ］

[［ア］の選択肢]

① $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　　② $3\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}$

③ $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

[［イ］の選択肢]

① $\frac{5}{18}\vec{a}-\frac{5}{18}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$　　② $\frac{5}{18}\vec{a}-\frac{5}{18}\vec{b}+3\vec{c}$

③ $-\frac{1}{18}\vec{a}+\frac{13}{18}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$　　④ $-\frac{1}{18}\vec{a}+\frac{13}{18}\vec{b}+\vec{c}$

⑤ $\frac{1}{36}\vec{a}+\frac{17}{36}\vec{b}+\vec{c}$　　⑥ $\frac{1}{36}\vec{a}+\frac{17}{36}\vec{b}+3\vec{c}$

(2)　$\overrightarrow{GG'}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{GG'}=$ ［ウ］

[［ウ］の選択肢]

① $\frac{5}{36}\vec{a}-\frac{5}{36}\vec{b}$　　② $-\frac{7}{18}\vec{a}+\frac{7}{18}\vec{b}$

③ $\frac{7}{36}\vec{a}-\frac{7}{36}\vec{c}$　　④ $-\frac{5}{36}\vec{a}+\frac{5}{36}\vec{c}$

⑤ $\frac{11}{18}\vec{b}-\frac{11}{18}\vec{c}$　　⑥ $-\frac{13}{18}\vec{b}+\frac{13}{18}\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{G'C}}+\overrightarrow{\mathrm{G'D}}+\overrightarrow{\mathrm{G'E}}=\vec{0}$ であることを証明せよ。

(証明)

$$\overrightarrow{\mathrm{G'C}}+\overrightarrow{\mathrm{G'D}}+\overrightarrow{\mathrm{G'E}}=\boxed{エ}+\boxed{オ}+(\vec{e}-\vec{g'})$$

$$=\boxed{カ}-\boxed{キ}\vec{g'}$$

$$=\boxed{カ}-\boxed{ク}=\vec{0}$$

[エ の選択肢]

① $(\vec{c}+\vec{g'})$　② $(\vec{c}-\vec{g'})$　③ $(\vec{g'}-\vec{c})$

[オ の選択肢]

① $(\vec{d}+\vec{g'})$　② $(\vec{d}-\vec{g'})$　③ $(\vec{g'}-\vec{d})$

[カ の選択肢]

① $(\vec{c}+\vec{d})$　② $(\vec{d}+\vec{e})$　③ $(\vec{e}+\vec{c})$

④ $-(\vec{c}+\vec{d})$　⑤ $-(\vec{d}+\vec{e})$　⑥ $-(\vec{e}+\vec{c})$

⑦ $(\vec{c}+\vec{d}+\vec{e})$　⑧ $-(\vec{c}+\vec{d}+\vec{e})$

[ク の選択肢]

① $\left(\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}\right)$　② $(\vec{c}+\vec{d})$

③ $\left(\frac{1}{3}\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{e}\right)$　④ $(\vec{d}+\vec{e})$

⑤ $\left(\frac{1}{3}\vec{e}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)$　⑥ $(\vec{e}+\vec{c})$

⑦ $\left(\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{e}\right)$　⑧ $(\vec{c}+\vec{d}+\vec{e})$

[MEMO]

第 9 講　位置ベクトル

PART1　位置ベクトル

1　3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，辺 BC を 2：3 に内分する点を D，辺 BC を 1：2 に外分する点を E，△ABC の重心を G，△AED の重心を G′ とする。

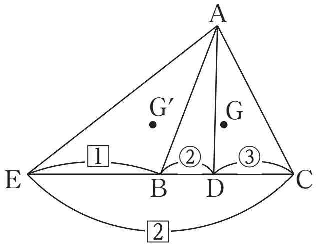
次の問いに答えよ。

(1)　点 G，点 G′ の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{GG'}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ であることを証明せよ。

D$(\vec{d})$，E$(\vec{e})$，G$(\vec{g})$，G′$(\vec{g'})$ とする。



(1)　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

$\vec{g'}=\dfrac{\vec{a}+\vec{e}+\vec{d}}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\vec{a}+\dfrac{2\vec{b}-\vec{c}}{-1+2}+\dfrac{3\vec{b}+2\vec{c}}{2+3}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(\vec{a}+\dfrac{13}{5}\vec{b}-\dfrac{3}{5}\vec{c}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{13}{15}\vec{b}-\dfrac{1}{5}\vec{c}$

(2)　$\overrightarrow{GG'}=\vec{g'}-\vec{g}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{13}{15}\vec{b}-\dfrac{1}{5}\vec{c}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)$

$=\dfrac{8}{15}\vec{b}-\dfrac{8}{15}\vec{c}$

(3)　$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(\vec{a}-\vec{g})+(\vec{b}-\vec{g})+(\vec{c}-\vec{g})$

$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-3\vec{g}$

$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{0}$

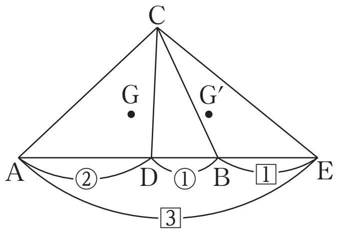
よって示された。

第 9 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：③，イ：③，ウ：②，エ：②，オ：②，
カ：⑦，キ：3，ク：⑧

[解説]



(1)　$\vec{\boldsymbol{g}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\vec{\boldsymbol{a}}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\vec{\boldsymbol{b}}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\vec{\boldsymbol{c}}$ [A]

$\vec{\boldsymbol{g}}'=\dfrac{\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\vec{c}+\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}+\dfrac{-\vec{a}+3\vec{b}}{3-1}\right)$ [B]

$=\dfrac{1}{3}\left(\vec{c}-\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{13}{6}\vec{b}\right)$

$=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{18}}\vec{\boldsymbol{a}}+\dfrac{\mathbf{13}}{\mathbf{18}}\vec{\boldsymbol{b}}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\vec{\boldsymbol{c}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathbf{GG'}}=\vec{g}'-\vec{g}$

$=\left(-\dfrac{1}{18}\vec{a}+\dfrac{13}{18}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)$

$=-\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{18}}\vec{\boldsymbol{a}}+\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{18}}\vec{\boldsymbol{b}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{G'C}}+\overrightarrow{\mathrm{G'D}}+\overrightarrow{\mathrm{G'E}}$

$=(\vec{\boldsymbol{c}}-\vec{\boldsymbol{g}}')+(\vec{\boldsymbol{d}}-\vec{\boldsymbol{g}}')+(\vec{e}-\vec{g}')$

$=(\vec{\boldsymbol{c}}+\vec{\boldsymbol{d}}+\vec{\boldsymbol{e}})-3\vec{g}'$

$=(\vec{c}+\vec{d}+\vec{e})-(\vec{\boldsymbol{c}}+\vec{\boldsymbol{d}}+\vec{\boldsymbol{e}})=\vec{0}$

[A]　三角形の重心の位置ベクトル
3 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする △ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

[B]　内分点，外分点の位置ベクトル
2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

$m:n$ に外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は

$$\vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}=\frac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n}$$